# Solutions des énigmes

COUITCHY

24 janvier 2007

# Table des matières

# Chapitre 1

# Alain et Bernard

## 1.1 L'erreur classique

L'erreur du débutant consiste en l'utilisation du raisonnement fallacieux mentionné ci-dessous.
Soit $x$ le travail accompli par Alain et $y$ le travail accompli par Bernard. On écrit le système :

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x = 10 \end{cases}$$

D'où l'on déduit naturellement $y = -2$ ! ! !

## 1.2 La méthode correcte

Voici la solution juste.
Soit $x$ la fraction de travail accompli par Alain en 1 jour. Soit $y$ celle de Bernard. Le système est alors :

$$\begin{cases} 8x + 8y = 1 \\ 10x = 1 \end{cases} \Rightarrow 8y = 1 - 8x = 1 - \frac{8}{10} = \frac{1}{5}$$

Ainsi $40y = 1$ et il faut donc 40 jours à Bernard pour accomplir le même travail qu'Alain ne l'a fait en 10.

# Chapitre 2

# Les chameaux de l'émir

La personne vient avec son propre chameau et le prête temporairement à l'émir. Celui-ci en possède donc 18. Il donne alors :

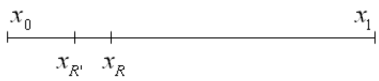
- $18 \times \frac{1}{2} = 9$ au premier
- $18 \times \frac{1}{3} = 6$ au second
- $18 \times \frac{1}{9} = 2$ au troisième

L'émir a donc légué $9 + 6 + 2 = 17$ chameaux... La personne peut donc repartir avec son propre chameau et le compte est bon !

# Chapitre 3

# L'oncle Guillaume

Voici un schéma explicatif de la sitution :




On notera si besoin est :
- $x_0$ et $v_0$ la position de la maison de l'oncle et sa vitesse
- $x_1$ et $v_1$ la position de la maison du neveu et sa vitesse
- $x_R$ la position du rendez-vous habituel
- $x_{R'}$ la position du rendez-vous ce jour-là
- $t_x$ le temps passé par l'oncle à regarder la pétanque
- $\Delta t$ le retard de l'arrivée à la maison du neveu

## 3.1 La solution fausse d'un élève de terminale

Un élève de terminale se croyant très futé propose la solution erronée suivante :
Le neveu arrive à la maison en compagnie de son oncle 10 minutes en retard. Il a donc perdu 5 minutes dans chaque sens. Comme il roule à 36 km/h, en 5 minutes il a donc parcouru 3 km. Ce sont 3 km qui n'ont donc pas été parcourus par l'oncle. Comme ce dernier marche à 3 km/h, cela signifie qu'il a attendu 1 heure...

## 3.2 La solution juste d'un ESIEEen

Cette solution fait un peu "usine à gaz", mais elle présente l'avantage de s'adapter à toute modification ultérieure du problème, en ce qui concerne les temps et les vitesses ! Habituellement, il n'y a pas d'écart de temps entre la distance parcourue par l'oncle à la vitesse $v_0$ et celle du neveu à la vitesse $v_1$. On peut donc écrire :

$$\frac{x_1 - x_R}{v_1} - \frac{x_R - x_0}{v_0} = 0$$

Mais ce jour-là, il y a eu un écart de temps $t_x$ (passé au terrain de pétanque, celui que l'on cherche) et le rendez-vous ne s'est pas produit au même endroit. Ainsi :

$$\frac{x_1 - x_{R'}}{v_1} - \frac{x_{R'} - x_0}{v_0} = t_x$$

Si on soustrait la première équation de la deuxième, membre à membre, on obtient :

$$t_x = \frac{x_R - x_{R'}}{v_1} - \frac{x_{R'} - x_R}{v_0} \Rightarrow t_x = (x_R - x_{R'}) \left( \frac{v_0 + v_1}{v_0 v_1} \right)$$

Or la distance $x_R - x_{R'}$ est la distance supplémentaire qu'a parcouru le neveu ce jour-là. Et on sait que la parcourir une fois dans chaque sens lui a fait perdre 10 minutes donc :

$$2(x_R - x_{R'}) = v_1 \Delta t \Rightarrow x_R - x_{R'} = \frac{\Delta t}{2} v_1$$

En définitive,

$$t_x = \frac{\Delta t}{2} \left( 1 + \frac{v_1}{v_0} \right)$$

Application numérique :

$$t_x = 5 \left( 1 + \frac{36}{3} \right) = 5 \times 13 = 65 mn$$

L'oncle Guillaume a donc regardé la pétanque pendant 1 heure et 5 minutes.

## 3.3 La solution juste d'un HEC

On reconnaît bien là le pragmatisme des commerciaux :
Le neveu a fait 6 km en 10 minutes. L'oncle a donc parcouru 3 km en moins, c'est-à-dire qu'il a marché 1 heure de moins. De plus l'heure de rencontre s'est produite 5 minutes plus tard.

Ainsi, l'oncle part à la même heure, marche 1 heure de moins et "attend" 5 minutes de plus. Cela implique qu'il est resté 1 heure et 5 minutes sur le terrain de pétanque ...

# Chapitre 4

# L'orfèvre

## 4.1 Solution

Le raisonnement ci-dessous ne tient que si le peintre ne dépense pas son or avant la fin de son contrat. En effet, voici comment réfléchit l'orfèvre :

- Le jour 1, il prévoit une coupe de 1 cm
- Le jour 2, il prévoit une coupe de 2 cm et il reprendra la coupe de 1 cm
- Le jour 3, il redonnera la coupe de 1 cm
- Le jour 4, il prévoir une coupe de 4 cm et reprend les deux précédentes

Et ainsi de suite...
Il y aura besoin également d'une coupe de 8 cm et une de 15. Avec les nombres $1, 2, 4, 8$ et 15, on peut en effet former par addition n'importe quel nombre jusqu'aux 30 cm prévu pour le travail complet.

## 4.2 Interprétation mathématique

Tout réside sur la décomposition d'un nombre quelconque en puissance de 2.
Avec les nombres $1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}$, on peut construire tous les nombres jusqu'à $2^n - 1$. Ainsi pour un nombre de jours de travail quelconque $j$, le nombre de coupes du lingot est donné par $log(j)/log(2)$ que l'on arrondit à l'entier supérieur le plus proche. Et la longueur du $i^{eme}$ morceau vaut $2^{i-1}$.

On choisit la base 2 car cela garantit que l'orfèvre n'aura jamais besoin de 2 coupes de longueur identique pour payer l'artiste. En effet, en base 2, seuls les chiffres 0 et 1 sont autorisés. Cela induit par la même un nombre de coupes minimal.

# Chapitre 5

# L'énigme d'Einstein

## 5.1 Méthode

Cette énigme ne nécessite aucune connaissance mathématique ni scientifique, elle ne nécessite aucune "astuce" non plus. C'est donc un excellent moyen pour tester les aptitudes de quelqu'un au raisonnement pur ...On considère que le temps de résolution est de l'ordre de la demi-heure. 20 minutes est un résultat très correct, 10 vraiment très bon.

Pour procéder, on s'aide d'un tableau de 6 lignes (numéro, couleur, nationalité, boisson, animal, cigarettes) et 5 colonnes. On commence par placer les trois informations les plus directes :

- la position du Norvégien
- d'où l'on déduit immédiatement celle de la maison bleue
- la position du lait

Ensuite, on couple les informations qui possèdent une caractéristique commune et l'on procède par élimination : un couple d'informations pris dans le bon ordre fournit alors deux nouvelles positions de manière certaine. On dit "pris dans le bon ordre" car un couple peut nécessiter des positionnements d'un qui doit lui précéder...

## 5.2 Solution

La réponse est : c'est l'Allemand qui possède le poisson.

Positionnements complets :

| Numéro | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Couleur | Jaune | Bleue | Rouge | Verte | Blanche |
| Nationalité | Norvégien | Danois | Anglais | Allemand | Suédois |
| Boisson | Eau | Thé | Lait | Café | Bière |
| Animal | Chat | Cheval | Oiseau | **Poisson** | Chien |
| Cigarettes | Dunhill | Blends | PallMall | Prince | BlueMaster |

# Chapitre 6

# Avec l'arithmétique

## 6.1 Solution

- Si PRODUIT ne peut pas répondre, c'est que le produit P qu'on lui a donné n'est ni un nombre premier, ni le carré ou le cube d'un nombre premier, ni le produit de deux nombres premiers. Les valeurs possibles de P sont donc :12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 52, 54, 56, 60, ..

- Quand SOMME affirme qu'il savait que PRODUIT ne pouvait pas répondre, c'est que la somme S donnée à SOMME n'est pas la somme de deux nombres premiers. Il en résulte que S est un nombre impair car selon la conjecture de Goldbach il est bien connu que tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers.

Par ailleurs la somme est inférieure à 55. En effet au delà de 55, une somme pourrait se mettre sous la forme 53 + a (53 étant un nombre premier) et dans ce cas PRODUIT avec P=53*a pourrait calculer 53 et a puisque les deux nombres sont compris entre 2 et 99 et la décomposition du produit serait unique.

Les sommes possibles pour SOMME sont donc ramenées à la liste LS : 11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 45, 47 et 51.

- Si PRODUIT connaît les deux nombres, c'est que le produit P n'est décomposable que d'une seule façon en un produit de deux nombres dont la somme appartient à la liste LS définie ci-dessus. Ainsi 12=2*6=3*4 ne convient pas car les sommes 8 et 7 n'appartiennent pas à LS. A l'inverse 28 convient car 28=2*14=4*7 et la somme 4+7=11 appartient à LS. Les valeurs possibles de P sont réduites à la liste LP qui peut être établie à la main mais les calculs sont assez longs et fastidieux ;l'aide d'un ordinateur se révèle précieuse : 18, 24, 28, 50, 52, 54, 76, 92, 96, 98, 100, 110, 112, 114, 124, 130, 138, 140, 144, 148, 150, 152, 154, 160, 162, 164, 168, 170, 172, 174, 176, 182, 186, 188, 190, 198, 200, 204, 208, 216, 230, 232, 238, 246, 250, 252, 266, 276, 280, 288, 294, 296, 304, 306, 308, 310, 322, 324,..

- Quand SOMME affirme à son tour qu'il connaît les deux nombres, c'est que pour un terme de LS, parmi tous les produits de deux nombres possibles, un et un seulement apparaît dans la liste LP. La somme S peut-elle être 11 ? Non, car S peut s'écrire S = 2+9 = 3+8 = 4+7 avec les trois produits possibles 18,24 et 28 qui font partie de LP. SOMME ne serait pas capable d'énoncer sa dernière affirmation car il ne saurait pas comment choisir entre les produits 18,24 et 28.

La somme peut-elle être 23 ? Non à nouveau, car S = 4+19 = 7+16 = 23 et les deux produits 4*19 = 76 et 7*16 = 112 font partie de LP.

S = 27 ? Non car S = 5+22 = 4+23 et les deux produits 5*22=110 et 4*23=92 font partie de LP.

S = 29 ? Non car S = 4+25 = 6+23 et les deux produits 4*25=100 et 6*23=138 font partie de LP.

S = 35 ? Non car S = 3+32 = 4+31 et les deux produits 3*32=96 et 4*31=124 font partie de LP.

S = 37 ? Non car S = 5+32 = 6+31 et les deux produits 5*32=160 et 8*31=186 font partie de LP.

S = 41 ? Non car S = 3+38 = 4+37 et les deux produits 3*38=114 et 4*37=148 font partie de LP.

S = 45 ? Non car S = 3+42 = 4+41 et les deux produits 3*42=126 et 4*41=164 font partie de LP.

S = 47 ? Non car S = 4+43 = 6+41 et les deux produits 4*43=172 et 6*41=246 font partie de LP.

S= 51 ? Non car S = 3+48 = 4+47 et les deux produits 3*48=144 et 4*47=188 font partie de LP.

On a volontairement « oublié » S = 17 qui est seule valeur de la somme pour laquelle il n'existe qu'un seul produit 4*13=52 qui fait partie de LP. Les autres produits possibles 2*15=30, 3*14=42, 6*11=66, 7*10=70, 8*9=72 ne font partie de LP.

Les deux nombres étaient donc 4 et 13.